VI ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

"Rumos e Avanços da Modelagem Matemática na Educação Matemática"

Curitiba - PR 27, 28 e 29 de novembro de 2014

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA POSSÍVEL CONTRIBUIÇÃO SOCIAL

Resumo: No presente trabalho temos por obtivo discutir a modelagem matemática e sua característica de auxiliar na análise e interpretação de questões sociais e nas tomadas de decisões associadas a elas. Para tanto, apresentamos uma atividade de modelagem matemática cujo nosso interesse é investigar como apresenta-se o número de homicídios no município de Toledo-PR. Diante disso, obtemos informações sobre o tema na 20ª Subdivisão Policial de Toledo–PR e em um *site* com informações sobre o assunto. Trabalhamos com o *método da substituição*, aprendido no ensino médio, e com o *método dos mínimos quadrados*, até então desconhecido por nós, com intuito de obter um modelo matemático para a situação. Observamos que entre os anos de 2005 e 2008 o número de homicídios aumentava exponencialmente e que a partir de 2010, ano que institucionalizou-se o Departamento de Homicídios, esse número passou a decrescer. Assim, concluímos que a modelagem matemática serviu como ferramenta para os órgãos competentes para tomar uma decisão e para nós para a compreensão da situação.
Palavras-chave: Modelagem Matemática; Modelo; Tomada de decisão.

Introdução

Em diferentes situações de nossa vida, nos deparamos com questões – de cunho social, econômico, cultural, etc. – que se configuram para nós como problemas que nos exigem uma resposta e/ou como inquietações que despertam nosso interesse para a busca em compreendê-las. Alguns exemplos dessas situações envolvem assuntos como o índice de natalidade, a quantidade de acidentes de trânsitos, o conglomerado de construções perto de rios, dentre outros. Assim, um estudo sistemático se faz pertinente para elaborar compreensões acerca desses temas.

Nesse sentido, a matemática nos serve como instrumento para analisar situações-problema de diferentes naturezas, de modo a subsidiar as tomadas de decisões associadas a elas. Um dos meios que viabiliza o estudo de fenômenos naturais e sociais, dentre outros, por meio de argumentações matemáticas é a modelagem matemática, entendida como a "arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (BASSANEZI, 2009, p. 24).

A situação-problema em questão consiste em investigar como se apresenta o número de homicídios na cidade de Toledo – PR a partir de 2005. Para tanto fizemos uso da modelagem matemática em virtude de suas contribuições para a análise da questão levantada, bem como de identificar um problema de cunho político-social.

No presente texto fazemos uma explanação sobre modelagem matemática, apresentando uma atividade e discutindo seu desenvolvimento, com vistas a trabalhá-la tanto no âmbito do ensino superior, como no ensino médio. E, por fim, fazemos reflexões sobre a atividade olhando particularmente para a questão da modelagem matemática e da tomada de decisões.

A Modelagem Matemática

Uma possibilidade ao se trabalhar com dados advindos da realidade é modelá-los por meio da matemática, e, nesse sentido, a modelagem matemática pode ser utilizada como uma ferramenta para interpretar ou até mesmo responder indagações provenientes de situações específicas e, assim, agir sobre a realidade, como pontua Vertuan (2010).

De acordo com Burak (1992, p. 62) a modelagem matemática "[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões".

Sob essa perspectiva a modelagem matemática pode ser encarada como "uma alternativa pedagógica para as práticas de ensino e aprendizagem em matemática" (TORTOLA; ALMEIDA, 2014, p. 64), configurando-se como uma estratégia para as aulas de matemática e como um meio de preparar os sujeitos para atuar na sociedade (BARBOSA, 2001).

Almeida e Vertuan (2011, p. 21) são mais específicos no que tange ao processo de fazer modelagem:

> uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) podem ser observadas (ALMEIDA; VERTUAN, 2011).

Para Biembengut e Hein (2009), é com a modelagem que se pode estabelecer um elo entre matemática e situações advindas da realidade. Esse elo permite interpretar a situação por meio da matemática, especificamente, de um modelo matemático, que nos

fornece compreensões acerca da situação e nos permite até mesmo fazer previsões associadas a alguns de seus aspectos.

Um modelo matemático, portanto, pode ser entendido como "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou de uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro" (LESH; CARMONA; HJALMARSON, 2006, p. 92). Ou seja, um modelo matemático é uma estrutura matemática utilizada para expressar relações e regularidades observadas na situação.

Para determinar o modelo matemático há alguns passos que precisam ser perpassados até a sua obtenção. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 28) há cinco momentos no processo associado à atividade de modelagem matemática, a saber:

1) Determinar a situação;
2) Simplificar as hipóteses dessa situação;
3) Resolver o problema matemático decorrente;
4) Validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real e, finalmente,
5) Definir a tomada de decisão com base nos resultados.

Nesse caminhar pode ocorrer que na etapa de validação o modelo obtido não se encaixe com a situação de forma apropriada, pois os resultados fornecidos pelo modelo matemático são muito distantes do que se pode observar. Nesse contexto, não é viável utilizarmos tal modelo para descrever ou explicar a situação, muito menos fazer previsões associadas a ele e utilizar esses resultados como base para tomada de decisões, um novo modelo matemático é necessário. Assim, é preciso uma revisão dos passos anteriores ou até mesmo, em alguns casos, uma nova modelagem.

Diante dessa explanação, no presente trabalho apresentamos uma atividade de modelagem matemática em que investigamos como se comporta o número de homicídios no município de Toledo-PR, com base nos dados dos últimos dez anos e, a partir destes, buscamos fazer uma previsão para os próximos anos. Para tanto, fizemos um levantamento das informações juntamente à 20ª Subdivisão Policial (SDP) de Toledo-PR e no *site Deepask*[1], pautando-se na modelagem matemática para interpretar a situação escolhida.

[1] O *Deepask* é uma plataforma que vincula informações sobre o setor socioeconômico brasileiro. Disponível em: http://www.deepask.com/goes?page=toledo/PR-Confira-a-taxa-de-homicidios-no-seu-municipio.

Modelando o número de homicídios no município de Toledo-PR

Ao se pensar em questões sociais, podemos nos remeter aos homicídios, que, mediante o quadro de violência que encontramos nas ruas, nos assusta. Segundo o dicionário Houaiss homicídio é a destruição, voluntária ou involuntária, da vida de um ser humano, isto é, um assassinato. Na própria Legislação essa temática está presente, denotando uma preocupação política para com o bem estar do cidadão. Pensando nessas questões surgiu o interesse em investigar matematicamente como os homicídios permeiam o município de Toledo.

Determinada a situação a ser investigada, fizemos um levantamento de dados, na 20ª Subdivisão Policial de Toledo-PR, bem como no *site Deepask*. Com os dados em mãos, observamos que em um intervalo de quatro anos (2005 a 2008) o índice de homicídios no município de Toledo vinha aumentando consideravelmente, como aponta a Tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de homicídios em Toledo – 2005 a 2008

Ano	Quantidade de homicídios
2005	*21*
2006	*29*
2007	*45*
2008	*61*

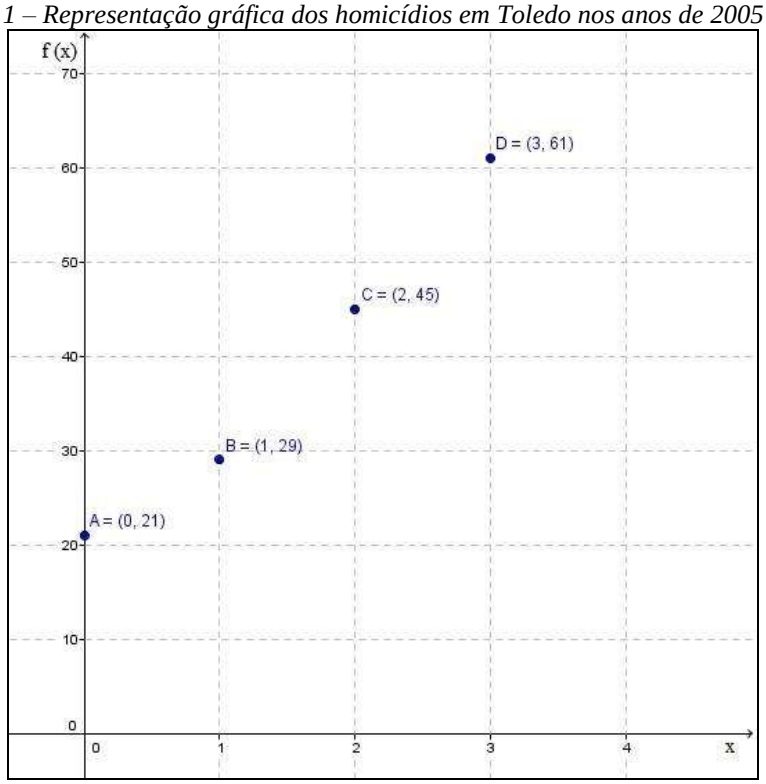
Fonte: www.deepask.com.

Nesse sentido, podemos inferir que há uma relação, em certa medida, entre a quantidade de homicídios e tempo. É claro que a quantidade de homicídios depende de muitos outros fatores, como a própria vontade do indivíduo de matar, porém, os dados indicam uma tendência de crescimento ao longo do tempo e, se pararmos para refletir, um rápido crescimento, pois estamos falando em quantidade de homicídios.

Construímos também, com o auxílio do *GeoGebra*, um gráfico, para nos auxiliar na visualização da relação entre as variáveis envolvidas no problema: tempo (t) e número de homicídios $f(t)$; mas para isso, utilizamos uma variável auxiliar x, sendo que $x = t - 2005$, ou seja, para cada ano foi associado um número natural em ordem crescente e

iniciando em zero, o ano de 2005, por exemplo, foi associado ao número natural 0, o ano de 2006 ao 1, e assim por diante, conforme indica a Figura 1. Desta forma, os pares ordenados constituíram-se pelo tempo x, representado pelas abscissas, e pela quantidade de homicídios *f(x)*, representada pelas ordenadas.

Figura 1 – Representação gráfica dos homicídios em Toledo nos anos de 2005 a 2008



Fonte: Elaborada pelos autores.

Conforme podemos observar, as razões entre os termos f_{x+1} e f_x se aproximam, e, dessa forma, podemos supor, por hipótese, que existe um k, tal que: $k = \frac{f_{x+1}}{f_x}$. Essa hipótese, nos leva a uma simplificação da situação, pelo fato das razões k serem muito próximas entre termos consecutivos ($k \approx 1{,}43$), o que nos sugere um comportamento exponencial. Assim, optamos em trabalhar com uma função exponencial, da forma $f(x) = ae^{bx}$, para obtenção do modelo. Uma segunda possibilidade, que não discutimos neste texto, seria utilizar progressão geométrica.

A função exponencial, de acordo com Iezzi, Dolce e Murakami (2004) caracteriza-se por associar a cada x real o número a^x, ou seja, $f : x \to a^x$. Percebam que na função

exponencial as variáveis são contínuas, embora, na interpretação da situação elas precisam ser vistas como discretas, para não perder de vista o contexto da situação.

Mediante essas considerações, encaminhamos a resolução da atividade de duas maneiras: primeiramente buscamos encontrar os parâmetros a e b por meio de cálculos aprendidos no ensino médio, e em um segundo momento, em virtude de sermos estudantes de graduação em matemática, optamos em utilizar um método numérico, até então desconhecido por nós e sugerido pelo professor que nos auxiliou na atividade.

Na fase de resolver o problema, ou seja, obter o modelo matemático, fez-se uso do *Método da Substituição*, apresentado por Dante (2005), e do *Método dos Mínimos Quadrados*. O primeiro pauta-se em trabalhar com sistemas de equações, substituindo pontos já conhecidos da função, ou seja, usando os dados coletados, já por sua vez o segundo, consiste em "determinar uma função aproximadora que se ajuste a forma ou tendência geral dos dados sem necessariamente passar pelos pontos individuais" (CHAPRA; CANALE, 2008, p. 379).

O Quadro 1 mostra os dois encaminhamentos dados à resolução.

Quadro 1 – Encaminhamentos da resolução

<table>
<tr><th>Método de Substituição</th><th>Método dos Mínimos Quadrados</th></tr>
<tr><td>Considerando os pares ordenados A e D,
$\begin{cases} 21 = ae^{b\cdot 0} (1) \\ 61 = ae^{b\cdot 3} (2) \end{cases}$
$(1) a = 21$
Substituindo (1) em (2)
$61 = 21e^{3b}$
$2{,}904761905 = e^{3b}$
$\ln(2{,}904761905) = 3b.\ln(e)$
$1{,}066351426 = 3b$
$b = 0{,}355450475$</td><td>$\begin{cases} na_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} xi\right) b_1 = \sum_{i=1}^{n} zi \\ \left(\sum_{i=1}^{n} xi\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} xi^2\right) b_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} xizi\right) \end{cases}$
Sendo $z = \ln(y)$, $a_1 = \ln(a)$, $b_1 = b$,
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>21</td><td>29</td><td>45</td><td>61</td></tr><tr><td>z</td><td>3,0445</td><td>3,3672</td><td>3,8066</td><td>4,1108</td></tr></table>
Como são $n = 4$ pontos,
$\sum_{i=1}^{n} xi = 6$; $\sum_{i=1}^{n} xi^2 = 14$; $\sum_{i=1}^{n} zi = 14{,}3291$;
$\sum_{i=1}^{n} xizi = 23{,}3128$</td></tr>
</table>

Assim: $f(x) = ae^{bx}$ $f(x) = 21e^{0,355450475x}$ *<u>Em função do tempo (t):</u>* $f(t) = 21e^{0,355450475t-712,67820}$	$\begin{cases} 4a_1 + 6b_1 = 14,3291 \\ 6a_1 + 14b_1 = 23,3128 \end{cases}$ Assim, $b_1 = 0,36383$ e $a_1 = 3,0298$ Como $a_1 = \ln(a)$ e $b_1 = b$ temos que: $a = 20,6930$ e $b = 0,36383$. Portanto: $g(x) = 20,6930e^{0,36383x}$ *<u>Em função do tempo (t):</u>* $g(t) = 20,6930e^{0,36383t-729,47915}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Obtemos, portanto, dois modelos: $f(x) = 21e^{0,355450475x}$ e $g(x) = 20,6930e^{0,36383x}$. Como eles ainda estão escritos em função da variável auxiliar x, faz-se necessário retornar à variável independente t, para que os modelos fiquem em função do tempo em anos, condizendo com os dados da situação. Lembrando que $x = t - 2005$, obtemos, portanto, os modelos: $f(t) = 21e^{0,355450475t-712,67820}$ e $g(t) = 20,6930e^{0,36383t-729,47915}$.

Para validação desses modelos, utilizamos os dados que já tínhamos e substituímos os valores de *t*, correspondentes aos anos, nas funções, obtendo assim valores correspondentes aos números de homicídios em cada ano.

Consideramos que os valores obtidos estão próximos dos valores dos fornecidos pela 20ª SDP e dos dados encontrados no site *Deepask*, representados nos gráficos pelos pontos A, B, C e D da Figura 1. As Tabelas 2 e 3 mostram essa proximidade. A validação, nesses casos, se deu estabelecendo comparações entre os dados coletados e os dados estimados pelas funções modeladas. Lembrando que "o modelo nunca encerra uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação conveniente da realidade analisada e, portanto, sujeito a mudanças" (BASSANEZI, 1999, p. 13).

Tabela 2 – Validação de $f(t) = 21e^{0,35545047t-712,67820}$

Ano (t)	Quantidade de homicídios OBSERVADA	Quantidade de homicídios OBTIDA PELO MODELO
2005	21	21
2006	29	29,9634
2007	45	42,7524
2008	61	61

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 3 – Validação de $g(t) = 20,6930e^{0,36383t-729,47915}$

Ano (t)	Quantidade de homicídios OBSERVADA	Quantidade de homicídios OBTIDA PELO MODELO
2005	21	20,693
2006	29	29,7737
2007	45	42,83928
2008	61	61,63843

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observem que de acordo com nosso modelo, em 2009 teremos 88 homicídios pela função $f(t)$ e 89 pela função $g(t)$, e em 2010 serão 125 e 128, respectivamente. Logo, analisando as funções $f(t)$ e $g(t)$ obtidas, com o passar dos anos o número de homicídios em Toledo aumentaria exponencialmente, o que chama a atenção, particularmente dos habitantes do município.

Esta reflexão está respaldada no nosso conhecimento matemático, o que vem ao encontro, da afirmação de Almeida e Silva (2010, p. 227) "[...] o conhecimento reflexivo precisa estar respaldado no conhecimento matemático; este fato aponta para a necessidade de domínio de competências matemáticas como parte do processo de compreensão da sociedade". Nesse momento identifica-se que o modelo afirma um problema social, o qual pode se agravar ao longo dos anos, se uma ação consistente não fosse tomada.

Ao retornar a pesquisa dos dados nas mesmas fontes já citadas, observamos que o número de homicídios começou a decrescer a partir de 2008 até 2013, conforme Tabela 4. Barbosa (2001, p. 6) afirma que "a indagação ultrapassa a formulação ou compreensão de um problema...", sendo assim, não se teria uma explicação sobre o que foi feito para essa mudança tão acentuada ser perceptível a um olhar matemático?

Tabela 4 – Quantidade de homicídios em Toledo - 2005 a 2008

Ano	Quantidade de homicídios
2008	*61*
2009	*56*
2010	*34*
2011	*31*
2012	*29*
2013	*20*

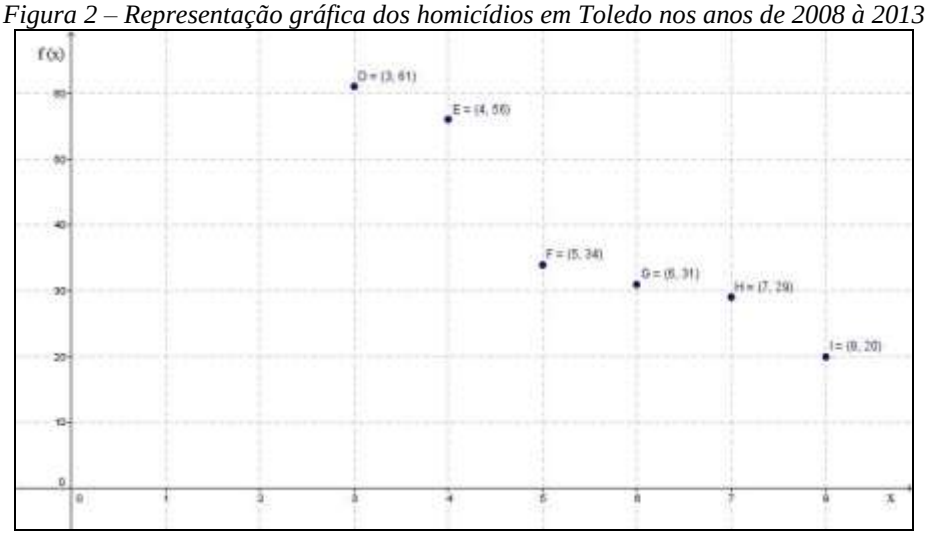
Fonte: www.deepask.com.

Ao fazer uma análise qualitativa da situação, descobrimos que em meados de junho de 2010 instaurou-se o Departamento de Homicídios na 20ª SDP do Município de Toledo. O que mostra uma preocupação com a situação do crescimento do número dos homicídios, sendo que possivelmente um estudo matemático dos dados foi realizado pelas autoridades responsáveis pelo assunto, e que atitudes, como a criação do departamento, foram tomadas, dentre outras, pois a partir de 2008 o número de homicídios começa a decrescer.

E dada essa situação, optamos por investigar o índice de homicídios que ocorreu a partir de 2008, se as decisões tomadas foram suficientes ou se o número de homicídios permanece ainda como um problema para a sociedade. Até mesmo porque "nem matemática nem Modelagem são 'fins', mas sim 'meios' para questionar a realidade vivida" (BARBOSA, 2001, p. 4).

Obtemos, portanto, outro modelo matemático para o novo intervalo de tempo considerado. Procedemos de maneira análoga à situação anterior. Porém, os dados agora indicavam um decrescimento no número de homicídios com o passar dos anos. Em virtude de agora se tratar de um decrescimento, pois a quantidade de homicídios diminui a cada ano e de também supormos por hipótese que os dados seguem uma tendência exponencial, a função agora para o ajuste é da forma $f(x) = ae^{-bx}$, como indica a Figura 2.

Figura 2 – Representação gráfica dos homicídios em Toledo nos anos de 2008 à 2013



Fonte: Elaborada pelos autores.

Novamente, pautamo-nos nos métodos da substituição e dos mínimos quadrados, utilizados anteriormente, a fim de obter os parâmetros a e b da função.

Quadro 2 – Ajuste da curva com os pontos D à I

Método de Substituição	**Método dos Mínimos Quadrados**
Considerando os pares ordenados D e G, $\begin{cases} 61 = ae^{3b} \, (1) \\ 31 = ae^{6b} \, (2) \end{cases}$ $(1) a = \dfrac{61}{e^{3b}}$ Substituindo (1) em (2): $31 = \left(\dfrac{61}{e^{3b}}\right).e^{6b}$ $31 = 61e^{3b}$ $e^{3b} = 0{,}508196721$ $3b.\ln(e) = \ln(0{,}508196721)$ $3b = -0{,}676886659$ $b = -0{,}225628886$ Substituindo b em (1):	$\begin{cases} na_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} xi\right) b_1 = \sum_{i=1}^{n} zi \\ \left(\sum_{i=1}^{n} xi\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} xi^2\right) b_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} xizi\right) \end{cases}$ Sendo $z = \ln(y)$, $a_1 = \ln(a)$, $b_1 = b$, x: 3, 4, 5, 6, 7, 8 y: 61, 56, 34, 31, 29, 20 x: 4,1108, 4,0255, 3,5263, 3,4339, 3,3672, 2,9957 Como são $n = 4$ pontos, $\sum_{i=1}^{n} xi = 33$; $\sum_{i=1}^{n} xi^2 = 199$; $\sum_{i=1}^{n} zi = 21{,}4594$; $\sum_{i=1}^{n} xizi = 114{,}1053$

$a = \dfrac{61}{e^{3b}}$ $a = \dfrac{61}{e^{3(-0,22562886)}}$ $a = 120,0322579$ Assim: $h(x) = ae^{bx}$ $h(x) = 120,0322579e^{-0,22562886x}$ *<u>Em função do tempo:</u>* $h(t) = 120,0322579e^{-0,22562886t+452,38586}$	$\begin{cases} 6a_1 + 33b_1 = 21,4594 \\ 33a_1 + 99b_1 = 114,2053 \end{cases}$ Assim, $b_1 = -0,2183$ e $a_1 = 4,7775$ Como $a_1 = \ln(a)$ e $b_1 = b$ temos que: $a = 118,8069$ e $b = -0,2183$. Portanto: $i(x) = 118,8069e^{-0,2183x}$ *<u>Em função do tempo:</u>* $i(t) = 118,8069e^{-0,2183t+437,69150}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesta etapa os dados coletados e os dados estimados pelas funções modeladas foram confrontados nas Tabelas 5 e 6, verificando a existência de uma aproximação na quantidade de homicídios.

Tabela 5 – Validação de $h(t) = 120,0322579e^{-0,22562886t+452,38586}$

Ano (t)	**Quantidade de homicídios OBSERVADO**	**Quantidade de homicídios MODELADO**
2008	61	60,9997
2009	56	48,6787
2010	34	38,8463
2011	31	30,9999
2012	29	24,7383
2013	20	19,7415

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 6 – Validação de $i(t) = 118,8069e^{-0,2183t+437,69150}$

Ano (t)	**Quantidade de homicídios OBSERVADO**	**Quantidade de homicídios MODELADO**
2008	61	61,71947
2009	56	49,61531
2010	34	39,88497
2011	31	32,0629
2012	29	25,77486
2013	20	20,72

Fonte: Elaborada pelos autores.

Diante dos dados observados é possível inferir que essa quantidade continuará decrescendo, e, nesse contexto, podemos estimar, por meio das funções modeladas $h(t)$ e $i(t)$, o número de homicídios para os próximos anos. Fazendo os cálculos observamos que em 2014 pela função h teremos 16 homicídios, e pela função i, 17 homicídios, e para 2015 pela função h serão 13 homicídios e pela função i serão 14. Já em 2020 serão 4 e 5, respectivamente. Observamos assim que as ações dos órgãos públicos diante do problema de crescimento apresentado no primeiro modelo foram apropriadas à situação, em virtude dos resultados satisfatórios, que já podemos observar e, por meio do segundo modelo matemático, prever.

Com essa "brincadeira" podemos prever que no ano de 2027 não teremos mais homicídios, o que denota a importância de ações educativas e medidas de conscientização e prevenção em relação a homicídios, até para que a tendência de decrescimento permaneça e, quem sabe, com essas medidas, decresça mais rapidamente. Contudo, há que se considerar também, que de acordo com o modelo obtido, por mais que ele condiz com a situação apresentada, especificamente, a partir do ano de 2008, a tendência é que o número de homicídios chegue próximo de zero, ao longo dos anos, pelo fato de $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$, o que demonstra se distanciar um pouco a realidade, pois, sabemos que a influência de fatores específicos, como já mencionamos, pode alterar novamente esse aparente padrão de regularidade.

Considerações Finais

A atividade de modelagem aqui apresentada teve por motivação inicial o interesse de um grupo de alunos, três acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, em adentrar no "mundo do fazer" modelagem matemática. Até o presente momento nenhum dos três haviam experenciado o "fazer" modelagem por iniciativa própria, no sentido, de escolherem um tema de interesse sem influências docentes.

Diante da questão norteadora, a investigação de como apresenta-se o número de homicídios na cidade de Toledo-PR a partir de 2005, conclui-se que o uso da modelagem respondeu o objetivo proposto, de compreender a situação e funcionar como parâmetro ou argumento para a tomada de decisão. Nesse sentido, observa-se a importância da

matemática para interpretar desde situações cotidianas até questões que permeiam as discussões sociais e políticas, especificamente, a proposta no trabalho, associada ao número de homicídios no município de Toledo-PR.

A relevância da modelagem matemática na tomada de decisões, é colocada em evidência a partir do levantamento dos dados, dos cálculos e da interpretação dos mesmos, uma vez que a modelagem nos auxiliou na análise das ações empregadas pelo Departamento Policial de Toledo. Avaliando o papel da modelagem matemática para com a situação, observamos o quanto análises dessa natureza pode acarretar em ações e mudanças consideráveis para a curso da situação, como foi o caso da constatação do crescimento "acelerado" de homicídios na cidade de Toledo e as ações tomadas, provavelmente, a partir de um estudo matemático dos dados, que levou a uma mudança nesse quadro.

A modelagem, portanto, além de contemplar aspectos associados ao ensino e à aprendizagem da matemática, pode implicar em tomadas de decisão e na implementação de ações que afetam a vida das pessoas. Tem-se não somente um envolvimento matemático, mas que também abrange aspectos políticos, sociais, econômicos, etc., apontando que a matemática possui desdobramentos em diferentes contextos e não apenas em questões tecnológicas, científicas ou de engenharia, específicos das ciências exatas.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. **Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa.** *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 2, 2010. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2752 >. Acesso em: 31 ago. 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" modelagem na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática.** Londrina: Eduel, 2011. p. 19-44.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico.** Reunião anual da ANPED, 2001. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf >. Acesso em: 01 set. 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** – 3ª ed. – São Paulo: Contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C. Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. **Biomatemática**, Campinas, n. 9, p. 9-22, 1999. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf>. Acesso em: 01 set. 2014.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** – 5ª ed. – São Paulo: Contexto, 2009.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese (Psicologia Educacional – Faculdade de Educação). Universidade Estadual de Campinas, 1992. Disponível em: < http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/ document/?code=vtls000046190 >. Acesso em: 27 ago. 2014.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia.** – 5ª ed. – São Paulo, McGraw-Hill, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática.** – Volume único – São Paulo: Ática, 2005.

HOMICÍDIO. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico Houaiss.** Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar. -** 9ª ed. – São Paulo: Atual, 2004.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Working group: models and modeling. In: PME-NA, Mérida. **Proceedings**... Mérida, 2006, p. 92-95.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. A modelagem matemática nos anos iniciais: um olhar sobre a linguagem. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Sucesso, 2014. p. 63-78.

VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2010, Maringá. **Anais**... Maringá: SBEM, 2010.