Geometria Plana

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GUIA DO PROFESSOR

EQUIPE PIBID / UTFPR - TOLEDO

2015

Coordenação

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Autores

Claudia Borgmann

Guilherme de Martini

Pablo Chang

Rosane Spielmann

Revisão Textual

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Projeto Gráfico

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Diagramação e Capa

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Geometria Plana: Áreas

1.1 INTRODUÇÃO

Caro professor(a), este pequeno guia irá trazer algumas informações e sugestões de como utilizar o vídeo "Os Pibidianos – Geometria Plana: Áreas". Um material didático que faz parte de um projeto desenvolvido para alunos do ensino fundamental da educação básica. Será apresentado um plano de aula contendo sugestões de cada parte do vídeo, e uma possível maneira de se conduzir a aula através avaliações, sites de buscas, dentre mais algumas informações. Que tem, por finalidade, esclarecer e sanar as dúvidas mais frequentes do educando, decorrentes da utilização do vídeo.

O guia busca direcionar sobre uma aplicação metodológica do vídeo. Para que você, professor, ensine aos seus alunos o conteúdo de maneira mais prazerosa e gratificante. E assim, ocorrendo um maior desenvolvimento e interação por parte dos alunos.

1.2 UM POUCO DA HISTÓRIA

Sabe-se que a origem da geometria tem raízes muito antigas. Fatos históricos apontam para o nascimento da Geometria como uma maneira de corroborar as necessidades humanas. Isso aconteceu desde 2000 anos a. C quando os babilônios utilizavam a noção de Geometria para demarcar os territórios. Da mesma maneira, os egípcios procuravam medir e demarcar suas terras, o que acontece até hoje, quando topógrafos, geólogos e arquitetos fazem os seus mapeamentos e plantas, e dessa forma, o cálculo de áreas tem sido uma preocupação constante na história da Matemática, como pontua Dante (2011, p.176).

1.3 ALGUMAS INFORMAÇÕES IMPORTANTES DO ASSUNTO

No sentido de promover a criatividade por meio da utilização de diversas mídias utilizamos vídeos, como objetos que também podem auxiliar a aprendizagem. Agregando, dessa forma, maior significado ao aluno, uma vez que instigam a combinação de texto e imagem.

O vídeo por nós apresentado, aborda diversos aspectos relacionados à área de figuras planas. No decorrer do vídeo faz-se uma breve explicação sobre as noções de área, e faz a dedução de algumas fórmulas de cálculo de áreas de figuras planas, seguindo de uma aplicação.

Ao pensarmos em uma perspectiva diferente para o ensino de determinado conteúdo, podemos citar as sequências didáticas, que envolvem diretamente o aluno, como instrumentos importantes, que podem implicar em uma mudança significativa nas aulas.

A sequência didática proposta neste guia é realizada de modo que os alunos desenvolvam sua capacidade investigativa e colaborativa, além de aplicarem os conhecimentos matemáticos adquiridos. Investigativa porque precisarão desenvolver estratégias para alcançar seu objetivo; colaborativa porque a atividade pressupõe a prática do trabalho em grupo.

Além disso, neste guia trazemos as informações que podem contribuir com a atividade do professor, no momento em que o mesmo explica o conteúdo. São exemplos que demonstram de uma maneira simples e prática de situações que envolvem o conteúdo de Geometria.

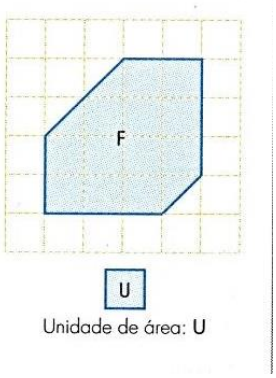
Ao término da guia, sugerimos algumas atividades para aplicação em sala de aula.

1.4 A PARTE MATEMÁTICA DO CONTEÚDO (DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES, EXEMPLOS)

A IDEIA INTUITIVA DE ÁREA

Suponha que queiramos medir a região do plano que está indicada por F. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área, que é U. Esse número assim obtido é a área de F.

Figura 1 – Representação de região do plano.



Fonte: DANTE, 2005, p. 176.

Então, a área da região plana F é 13,5 U.

REGIÃO QUADRADA UNITÁRIA

Estabelecemos como unidade área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada de região quadrada unitária. Então qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Figura 2 – Representação da região quadrada unitária

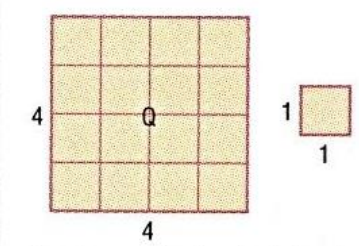
Fonte: DANTE, 2005, p. 176.

ÁREA DA REGIÃO QUADRADA

Consideremos uma região quadrada Q cujo lado mede *n*, em que *n* é um número natural. Ela pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário e, portanto, com área 1.

Logo, a região quadrada Q tem área n^2.

Figura 3 – Região quadrada de lado 4.

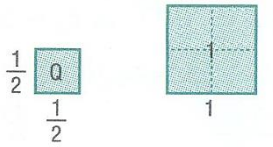


Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas unitárias.

Fonte: DANTE, 2005, p. 176.

Vejamos agora quando o lado da região quadrada Q tem por medida $\frac{1}{n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Neste caso, a região quadrada unitária pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, todas congruentes a Q.

Figura 4 – Região quadrada.



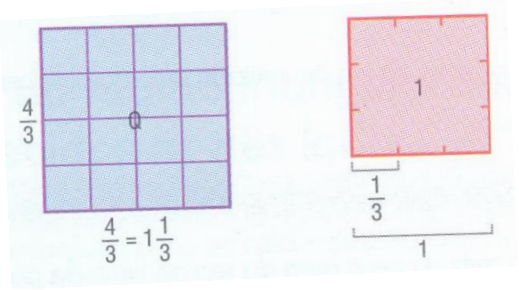
Fonte: DANTE, 2005, p. 176.

Assim, $n^2 \cdot (área\ de\ Q) = 1$, logo, área de $Q = \frac{1}{n^2}$.

Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado da região quadrada Q é um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, pode-se decompor Q em m^2 regiões quadradas, cada uma das quais com lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área de cada uma dessas regiões quadradas menores é $\frac{1}{n^2}$.

Figura 5 – Região quadrada.



Fonte: DANTE, 2005, p. 177.

Região quadrada de lado $\frac{4}{3}$, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas menores, cada uma com um lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Área da região $Q = \frac{16}{9}$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

Portanto, a área da região quadrada Q será dada por $m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja, área de $Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

É possível provar que, se a medida do lado da região Q for um número irracional k, ainda assim, área de $Q = k^2$.

Concluímos assim, que a área de uma região quadrada Q cujo lado mede l é dada por:

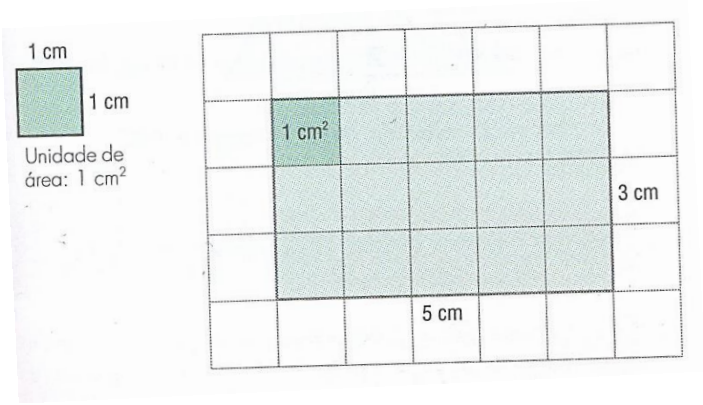
$$Área\ de\ Q = l^2$$

Sendo l um número real positivo qualquer.

ÁREA DA REGIÃO RETANGULAR

A região retangular abaixo pintada contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm².

Figura 6 – Região retangular.



Fonte: DANTE, 2005, p. 177.

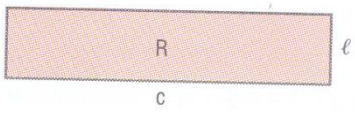
Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas na região retangular, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura: $5cm \cdot 3cm = 15cm^2$.

Neste caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.

Vamos provar que, se a medida do comprimento (c) e a medida da largura (l) forem números reais quaisquer, a área da região retangular R é dada por: $área\ de\ R = c \cdot l$.

Consideremos uma região retangular R de comprimento c e largura l (ou base c e altura l) e, em que c e l são números reais.

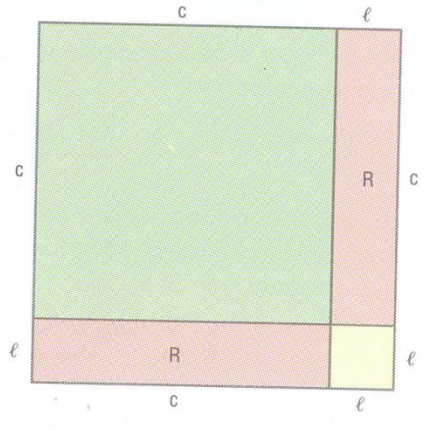
Figura 7 – Retângulo.



Fonte: DANTE, 2005, p. 177.

Construímos uma região quadrada cuja medida do lado é $c + l$, que contém duas copias de R e mais duas regiões quadradas, uma cuja o lado mede c e outra cujo lado mede l.

Figura 8 – Região quadrada.



Fonte: DANTE, 2005, p. 177.

A área dessa região quadrada (Q) é dada pelo quadrado de uma soma: $área\ de\ Q = (c + l)^2 = c^2 + 2cl + l^2$. (I)

Como as regiões quadradas tem áreas iguais a l^2 e c^2, concluímos que: $área\ de\ Q = c^2 + l^2 + 2 \cdot (área\ de\ R)$. (II)

Comparando (I) e (II), chegamos a:

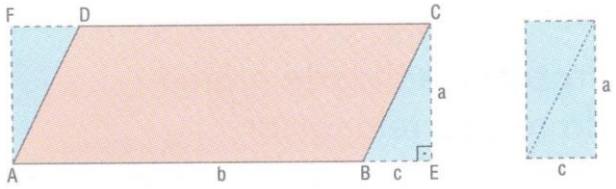
$$Área\ de\ R = c \cdot l$$

ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO

Primeiramente paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Vamos calcular a área de região plana limitada pelo paralelogramo ABCD tomando como base $\overline{AB}$ de medida **b** e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida **a**. examine a figura:

Figura 9 – Paralelogramo.



Fonte: DANTE, 2005, p. 178.

A região limitada pelo paralelogramo está contida em uma região retangular de base $b + c$ e altura **a**. Você já sabe: a área dessa região retangular é dada por: $(b + c)a = ba + ca$.

Observe que a região retangular é formada pela região limitada pelo paralelogramo mais duas regiões retangulares que, juntas, formam uma região retangular de área ca. Assim, $ba + ca = (área\ da\ regiao\ limitada\ pelo\ paralelogramo) + ca$. Portanto,

$$Área\ da\ regiao\ limitada\ pelo\ paralelogramo = ba$$

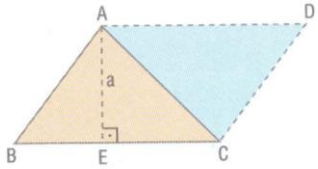
Isso significa que a área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela altura correspondente a essa base escolhida.

ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR

Conhecendo-se a área da região limitada por um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de uma região triangular. Sabe por quê? Porque toda região triangular é metade da região limitada por um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Figura 10 – Triângulo.



Fonte: DANTE, 2005, p. 178.

Dada a região triangular ABC, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e a região limitada pelo paralelogramo ABCD. Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida **a** desse paralelogramo.

Já sabemos que, se a medida $\overline{BC}$ é **b**, então a área da região limitada pelo paralelogramo é ba. Mas as regiões triangulares ABC e ADC são congruentes. Logo, essas regiões triangulares tem áreas iguais. Assim: $Área\ da\ regiao\ ACBD = 2 \cdot (área\ da\ regiao\ triangular\ ABC)$.

Portanto,

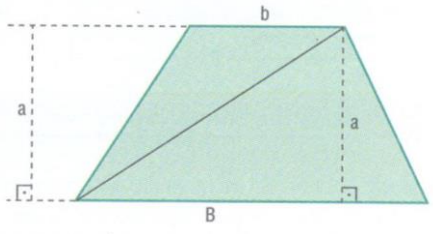
$$Área\ da\ região\ triangular\ ABC = \frac{ba}{2}$$

ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM TRÁPEZIO

Trapézio é todo quadrilátero com um só par de lados paralelos (base).

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta. Por exemplo, vamos decompor a área da região limitada por um trapézio traçando uma de suas diagonais. Dividimos a região limitada por um trapézio em duas regiões triangulares: uma de base B e altura **a** e outra de base **b** e altura **a.**

Figura 11 – Trapézio.



Fonte: DANTE, 2005, p. 179.

A área de uma região triangular você já aprendeu a calcular. Portanto, a área da região trapezoidal é dada por: $A = \frac{Ba}{2} + \frac{ba}{2} = \frac{(B+b)a}{2}$

Então:

$$A = \frac{(Base\ maior + base\ menor) \cdot altura}{2}$$

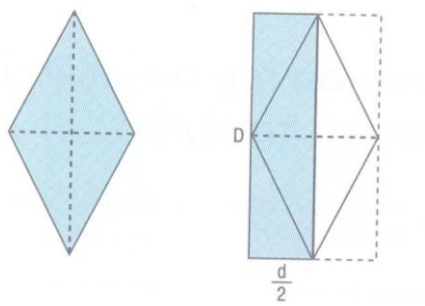
Dizemos que a área de uma região trapezoidal é igual a semissoma das medidas das bases vezes a medida da altura.

ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM LOSANGO

Todo losango é um paralelogramo, daí a área da região limitada por ele pode ser calculada como produto da base pela altura. Entretanto, em geral as dimensões de um losango são exressas pelas medidas de suas diagonais **D** e **d**.

Toda região limitada por um losango, tem a mesma área de uma região retangular com altura **D** e base $\frac{d}{2}$, como mostra as figuras:

Figura 12 – Losango.



Fonte: DANTE, 2005, p. 180.

Assim, a área da região limitada por um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais, veja: $A = D \cdot \frac{d}{2}$ ou $A = \frac{Dd}{2}$

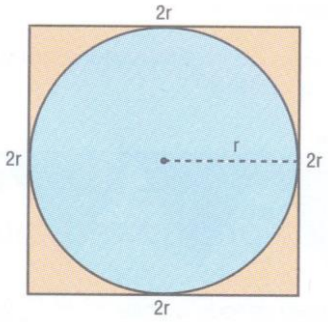
Dessa forma temos:

$$A = \frac{Diagonal\ maior \cdot diagonal\ menor}{2}$$

ÁREA DO CÍRCULO

Veja o círculo abaixo inscrito em um quadrado.

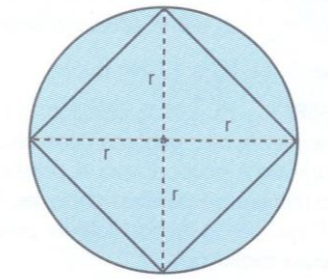
Figura 13 – Círculo inscrito em um Quadrado.



Fonte: DANTE, 2005, p. 182.

Medida do lado do quadrado: $2r$.
Medida da área do quadrado: $(2r)^2 = 4r^2$.
Então a área do círculo com raio de medida **r** é menor do que $4r^2$.
Observe o mesmo círculo circunscrito a um quadrado.

Figura 14 – Círculo circunscrito a um Quadrado.



Fonte: DANTE, 2005, p. 182.

O quadrado tem diagonais de medidas $2r$ e $2r$.
Como o quadrado é um caso particular de losango, a área da região quadrada pode ser obtida assim: $\frac{2r \cdot 2r}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$.

Então a área do círculo com raio de medida **r** é maior do que $2r^2$. Assim em um círculo com raio de medida **r** é maior do que $2r^2$. Assim, em um círculo de medida **r**, a área **A** é tal que: $2r^2 < A < 4r^2$, ou seja, a área **A** é obtida pelo produto próximo de 3(que veremos que *o* π) por **r²**.

Agora usando o círculo dividido em setores, temos que o mesmo foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede **r.**

A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é:

$$A = \pi r^2$$

1.5 OBJETIVOS

O material tem por objetivo desenvolver a ideia intuitiva de área, com enfoque em figuras planas e, também, demonstrar as fórmulas de área de figuras planas estimulando o raciocínio lógico. O vídeo apresentado contém cenas de aplicação e diálogos envolventes fazendo com que o aluno se coloque no lugar do personagem. Apesar de exibir um contexto fictício (do jogo Super Mario), é uma forma incentivadora de mostrar a ideia de área, sendo que pode, posteriormente, ser aplicado ao cotidiano.

Assim como diz, "no ensino fundamental é evidente a dificuldade dos alunos em entender o conceito de área de uma figura plana" (LAMAS, 2010). O que confirma a necessidade de utilizar métodos diversificados para serem utilizados na sala de aula. Também segue que "em geral, os professores trabalham meramente aplicações de fórmulas e o aluno não sabe o que realmente significa quando diz: a área desta folha é 10 cm". O que confirma que há também necessidade de explicar a origem das fórmulas mais utilizadas nos vestibulares.

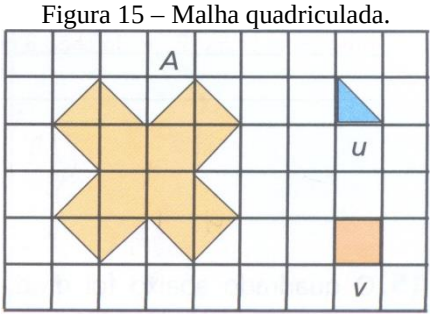
A partir dessa dificuldade apresentada, o vídeo é uma alternativa eficiente para ser utilizada como material didático. Segundo José Manuel Morán, no seu artigo "O vídeo na sala de aula", os vídeos aproximam os alunos do cotidiano, linguagens de aprendizagem e comunicação. Contudo, o objeto está ligado a um contexto de lazer. "Vídeo, na concepção dos alunos, significa descanso e não "aula", o que modifica a postura e as expectativas em relação ao seu uso". Com isso, é preciso aproveitar esta expectativa para atrair atenção do aluno para introduzir assuntos pedagógicos.

1.6 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

1) Observando a malha quadriculada ao lado, responda:
   b) Qual é a área de A usando u como unidade de medida.
   c) Qual é a área de A usando v como unidade de medida.

Figura 15 – Malha quadriculada.



Fonte: CARVALHO & REIS, 2009, p. 197.

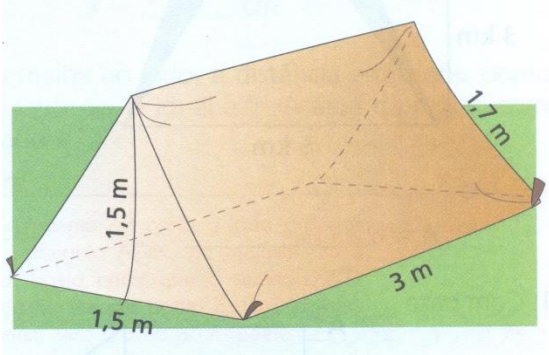
2) Um paralelogramo foi desmontado e remontado, como mostra a figura abaixo. É possível calcular a área desse paralelogramo? Qual é seu valor?

Figura 16 – Paralelogramo e retângulo.

Fonte: CARVALHO & REIS, 2009, p. 196.

3) Uma barraca com base retangular tem as dimensões mostradas abaixo. Qual a área de tecido que foi gasta para confeccionar essa barraca, contando com a base?

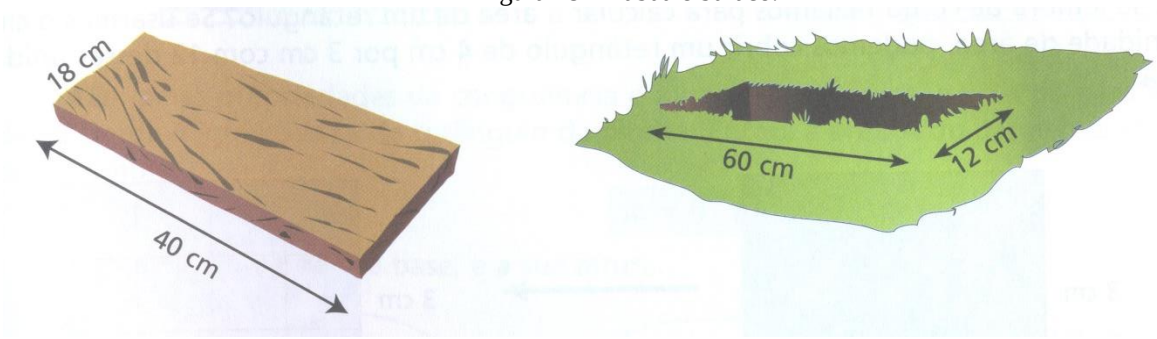
Figura 17 – Barraca com base retangular.



Fonte: CARVALHO & REIS, 2009, p. 205.

4) Será que é possível cortar a tábua abaixo em exatamente dois pedaços, a fim de cobrir um buraco de 60 cm por 12 cm?

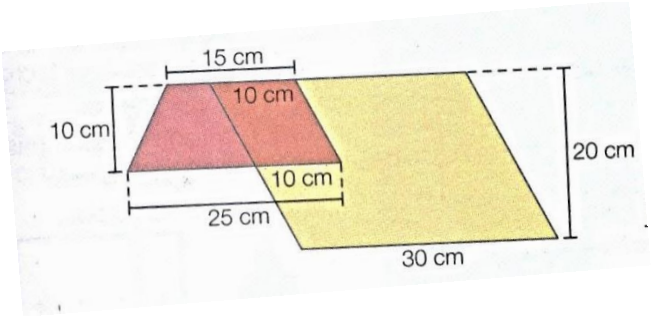
Figura 18 – Tábua e buraco.



Fonte: CARVALHO & REIS, 2009, p. 199.

5) Determine a área total da figura, sabendo que ela foi construída por meio de sobreposição de trapézio e paralelogramo.

Figura 19 – Sobreposição de trapézio e paralelogramo.



Fonte: JOAMIR, 2013, p. 201.

6) A partir de 2002, passou a circular no Brasil um novo modelo da moeda de 1 real. Ela possui um núcleo prateado composto por aço inoxidável e um anel externo dourado, que lembra uma coroa circular, composto por aço revestido de bronze. Nessa moeda, entre outras características, estão presentes grafias encontrados em cerâmicas de origem indígena, fazendo referência às raízes étnicas brasileiras. Essas características da moeda de 1 real são importantes elementos de segurança para evitar fraudes. Calcule a área aproximada da coroa circular dourada da moeda de 1 real, conforme indicações a seguir. (Use π=3,14.)

Figura 20 – Moeda de um real.

Fonte: JOAMIR, 2013, p. 189.

7) Com base no raciocínio lógico estudado no vídeo para o desenvolvimento das fórmulas de área de figuras planas:

a) Construa a fórmula de área do paralelogramo. (Use b como base e h como altura).

b) Desenvolva também a fórmula de área de losango. (Use D como diagonal maior e d como diagonal menor.)

c) E por fim, desenvolva a fórmula de área de qualquer polígono regular (use a como apótema, n como o número de lados e l como o lado do polígono).

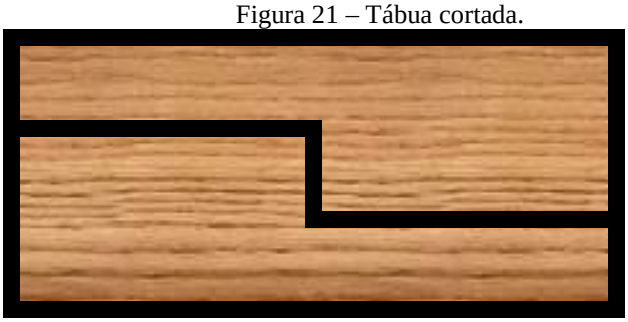
1.7 COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

É recomendada a utilização do vídeo no início do conteúdo como introdução, de forma a atrair a atenção dos alunos para o tema e motivá-los a estudar mais sobre áreas de figuras planas. Também é recomendado o professor recapitular trechos específicos do vídeo conforme o desenrolar das aulas, aproveitando ao máximo das ilustrações e animações que o vídeo oferece. Após apresentar o vídeo aos alunos, é sempre importante fazer comentários, ou seja, não apenas assistir por assistir.

No instante 04:30, é feito uma demonstração visual da fórmula da área de triângulo, a partir da divisão de um retângulo, pela diagonal, em dois triângulos. Nessa visão, a altura do triângulo é um dos catetos, pois o triângulo é retângulo. No entanto, no instante 05:00, a fórmula é usada num triângulo acutângulo. Cabe ao professor comentar aos alunos a validade da fórmula para quaisquer triângulos.

Dos exercícios apresentados acima, há alguns que necessitam cuidados especiais. Na questão 4, por exemplo, a solução se dá num corte da tábua que não é por uma reta, e sim, por uma figura semelhante a essa:

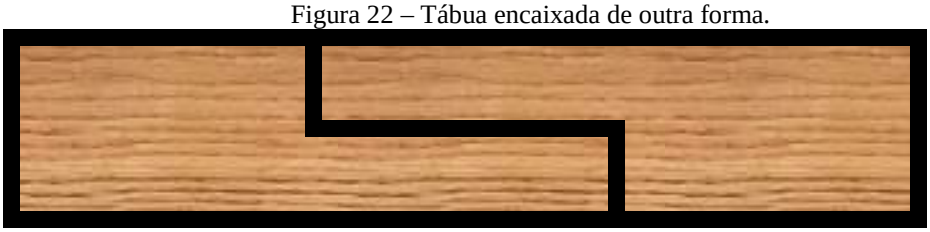
Figura 21 – Tábua cortada.



Fonte: Dos autores, 2015.

A partir disso, as duas partes podem se encaixar dessa forma, chegando às mesmas medidas da área do buraco:

Figura 22 – Tábua encaixada de outra forma.



Fonte: Dos autores, 2015.

1.8 AVALIAÇÃO

O professor pode avaliar os alunos de diversas formas. Podendo avalia-los através de atividades, como apresentadas acima. Ou então, através de anotações dos próprios alunos, na qual eles captaram de mais importante, o que é interessante para a discussão após assistir ao vídeo. Um exemplo de trabalhar com os alunos é utilizar o papel quadriculado, trabalhando com recortes de figuras para montar figuras das mesmas áreas apresentadas no vídeo. Essa é uma forma de se trabalhar com materiais manipuláveis, dando maior impacto à aprendizagem significativa dos alunos.

1.9 SUGESTÕES DE SITES PARA PESQUISA SOBRE O ASSUNTO

GeoGebra Tube: <https://www.geogebratube.org/> Possui várias construções matemáticas prontas que podem ser visualizadas no software GeoGebra, as quais podem auxiliar o professor não somente nesse conteúdo, mas em outros também.

Khan Academy: <https://pt.khanacademy.org/math/geometry/triangle-properties> Apresenta exercícios, problemas e vídeos que abordam diferentes conteúdos matemáticos, inclusive comprimentos, áreas e volumes. Obs.: há algumas páginas do site ainda não foram traduzidas para o português.

Mundo Educação: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/area-perimetro.htm> Contempla o conteúdo perímetro além de introduzir a ideia de áreas.

Banco Internacional de Objetos Educacionais: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/> Possui animações dinâmicas que podem ser baixadas para auxiliar o aluno e até mesmo o professor na visualização das medidas de áreas.

1.10 INDICAÇÕES DE REFERÊNCIAS

CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. **Aplicando a matemática – 8º ano**. São Paulo, Casa Publicadora Brasileira, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Volume Único.** São Paulo: Ática, 2005.

JOAMIR, Souza. **Novo olhar matemática.** 2ª Edição. São Paulo: FTD, 2013.

LAMAS, R. C. P.; CÁCERES, A. R.; COSTA, F. M.; PEREIRA, I. M. C.; MAURI, J. **Ensinando Área no Ensino Fundamental.** Dia a dia educação, 2010.

SANTOS, C. O. **A importância da visualização do ensino da Geometria Plana e Espacial.** Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual de Goiás, Unidade Universidade de Jussara, Jussara, 2009. Disponível em: <http://www.cdn.ueg.br/arquivos/jussara/conteudoN/1209/Cristiane_PDF.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2015.