Pontos Notáveis de um Triângulo

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GUIA DO PROFESSOR

EQUIPE PIBID / UTFPR - TOLEDO

2015

Coordenação

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Autores

Djerly Simonetti

Guilherme de Martini

Maiara dos Santos

Matheus Wallace Silva Carvalho

Revisão Textual

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Projeto Gráfico

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Diagramação e Capa

Barbara Diesel Winiarski Novaes

Renato Francisco Merli

Rodolfo Eduardo Vertuan

Desenho Geométrico: Pontos Notáveis de um Triângulo

1 INTRODUÇÃO

No presente material apresenta-se uma possível abordagem do conteúdo "Pontos Notáveis de um Triângulo", utilizando as ferramentas régua comum, compasso e o *software GeoGebra*. A aplicação das atividades pode ocorrer para introduzir ou complementar o conteúdo já citado.

1.1 UM POUCO DE TRIÂNGULO

Não há fontes pontuais de quando o triângulo foi construído, mas tudo que sabemos é que na Grécia Antiga muitas construções lembravam essa figura geométrica.

Nas construções, sejam de grande ou pequeno porte, a estrutura triangular as tornam estáveis, ou seja, proporciona a estabilidade da construção, não ocorrendo deformações na mesma. O triângulo é a forma mais estável da natureza, já que por um triângulo "passa" um único plano.

Os pontos notáveis são particularidades de um triângulo. Giovanni Ceva estudou esses pontos baseado nas inferências deixadas por Menelau de Alexandria. Ceva concluiu que as cevianas – qualquer seguimento que une um vértice à reta suporte do lado oposto do triângulo – do mesmo tipo, interceptam no mesmo ponto.

Essas considerações foram de suma importância para o desenvolvimento da Mecânica, a qual trabalha com corpos onde se faz necessário abordar o centro de gravidade do corpo, o que coincide com o Baricentro, um dos pontos notáveis de um triângulo.

1.2 ALGUMAS INFORMAÇÕES IMPORTANTES DO ASSUNTO

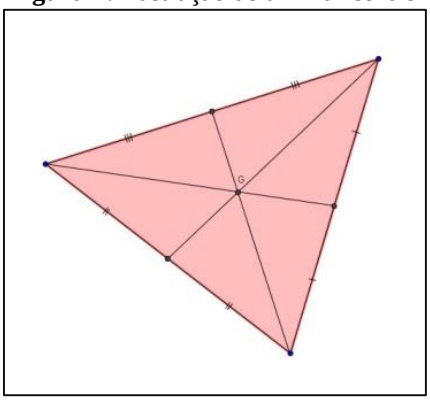
O aluno já deve ter conhecimento dos conceitos iniciais de Geometria, como: ponto, reta, semirreta, plano e ângulo, além de já ter contato com o *software GeoGebra*.

1.3 A PARTE MATEMÁTICA DO CONTEÚDO (DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES, EXEMPLOS)

Baricentro

As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 122).

Figura 1: Ilustração de um Baricentro



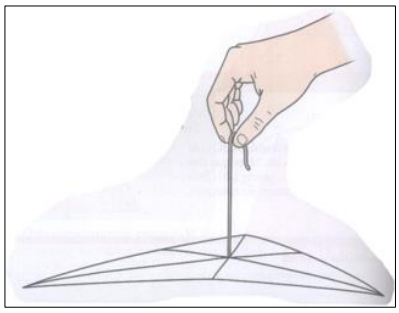
Fonte: Dos autores, 2015

Aplicação:

O baricentro coincide com o centro de gravidade, ou seja, encontrando o baricentro de um objeto, no qual podemos representar um triângulo, é possível equilibrá-lo.

Exemplo:

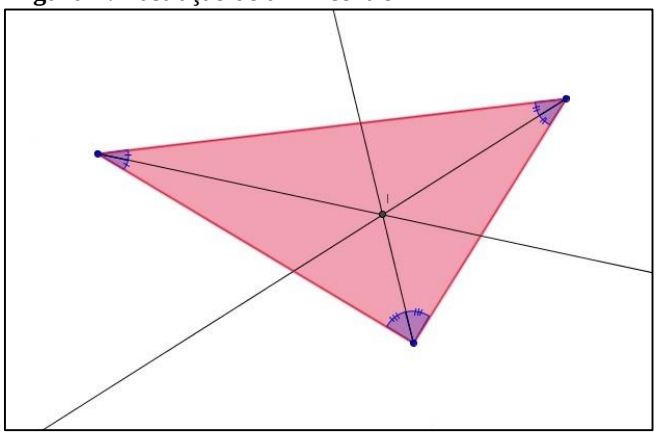
Ao fazer um triângulo de papelão, por exemplo, podemos suspendê-lo por um barbante. Para tanto, basta encontrar o seu baricentro, o qual coincide com seu centro de gravidade. Que tal tentar?



Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 124).

Figura 2: Ilustração de um Incentro



Fonte: Dos autores, 2015

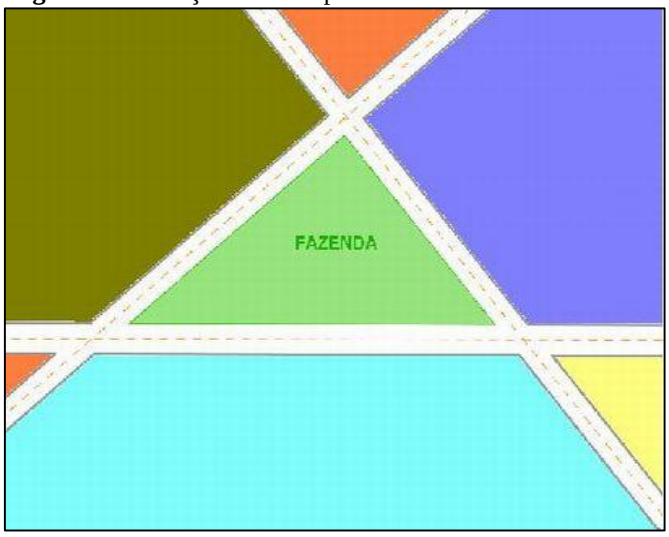
Aplicação:

Uma das possibilidades de uso desse conceito é quando se quer saber em qual local temos igual distância com outras três posições, que não estão em linha reta e que ao representar um triângulo com essas três posições, as mesmas farão parte dos lados do triângulo.

Exemplo:

Seu Pedro precisa construir um galpão em sua fazenda. E para sua maior rentabilidade, é interessante que construa a mesma distância das três estradas. Onde o galpão deve ser construído então?

Figura 3: Ilustração do exemplo do Incentro

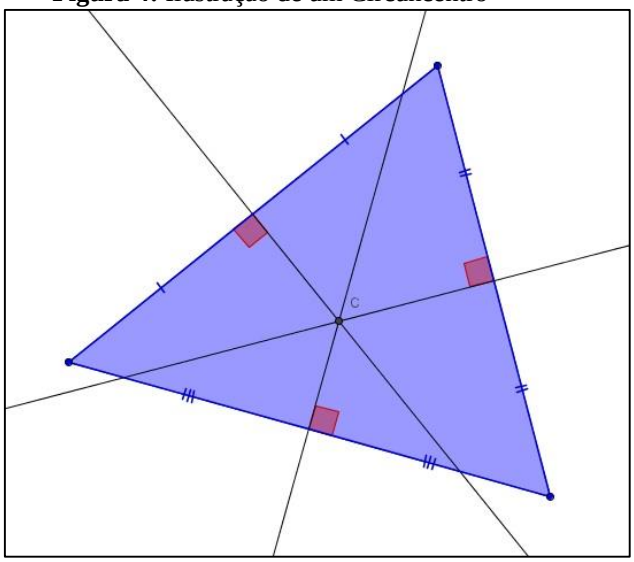


Fonte: Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=14366. Acesso em: 16 fev. 2015.

Circuncentro

As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 125).

Figura 4: Ilustração de um Circuncentro



Fonte: Dos autores, 2015

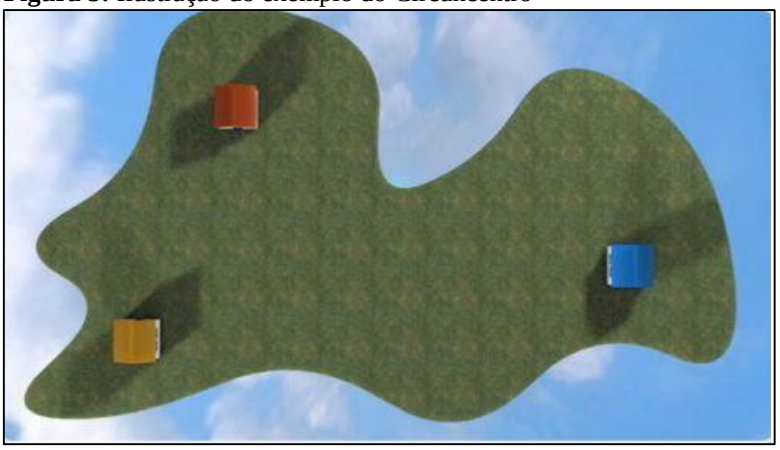
Aplicação:

Uma das possibilidades de uso desse conceito é quando se quer saber em qual local temos igual distância com outras três regiões que não estão em linha reta e que ao representar um triângulo com essas três regiões, as mesmas farão parte dos vértices do triângulo.

Exemplo:

Em uma comunidade três famílias estão decididas em fazer um mutirão para construir uma horta. João é o responsável pelo projeto e precisa saber em qual local a horta deve estar situada sendo que as três famílias querem estar a mesma distância da horta.

Figura 5: Ilustração do exemplo do Circuncentro

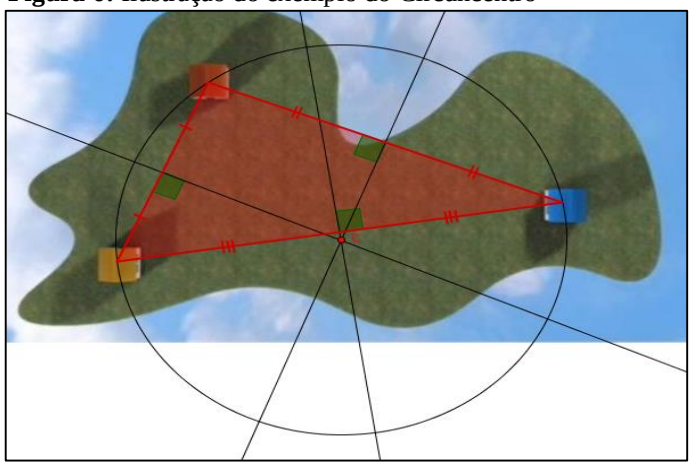


Fonte: Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074. Acesso em: 25 fev. 2015.

Visualizando um mapa da comunidade, João percebe que as casas não são colineares, sendo assim, elas determinam uma circunferência e o centro dessa circunferência, por definição, é equidistante a todos os pontos desta, portanto, é o local em que a horta deve ser construída para que fique exatamente a mesma distância de cada uma das casas.

Como dito anteriormente, o circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes, e o mesmo é equidistante aos três vértices do triângulo e isso é valido para qualquer caso. Portanto, a solução do problema de João é encontrar esse ponto, como na Figura 6.

Figura 6: Ilustração do exemplo do Circuncentro

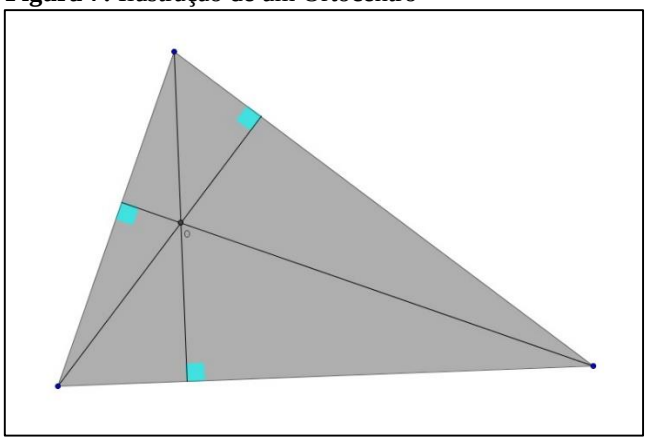


Fonte: Adaptado de: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074. Acesso em: 25 fev. 2015.

Ortocentro

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 126).

Figura 7: Ilustração de um Ortocentro



Fonte: Dos autores, 2015

Um fato interessante se tratando dos pontos notáveis de um triângulo, especificamente o Circuncentro, o Baricentro e o Ortocentro, é que após estudos feitos pelo matemático suíço Leonhard Paul Euler, foi-se constatado e provado[1] *que esses pontos são colineares a uma reta a qual é conhecida como Reta de Euler, nome que homenageia o matemático. A Reta de Euler não está definida somente em um triângulo equilátero.*

2 OBJETIVOS

Compreender Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro em um triângulo.
Representar Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro em um triângulo.
Identificar Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro em um triângulo.

3 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

3.1 ATIVIDADE 1

(Duração: 4 horas/aula)

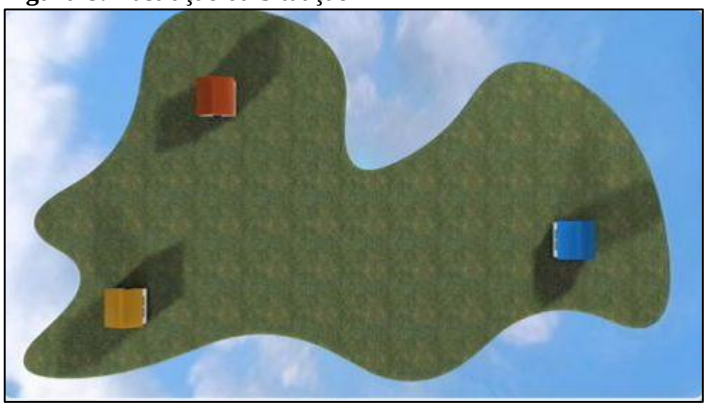
Imaginemos a seguinte situação:

Três famílias que vivem em uma mesma propriedade rural desejam construir um depósito de lixo em comum e desejam que o mesmo fique com igual distância das três casas.

Utilize o *GeoGebra* para descobrir onde esse depósito deve ser construído.

[1] https://pt.khanacademy.org/math/geometry/triangle-properties/triangle_property_review/v/euler-s-line-proof - Demonstração da propriedade da Reta de Euler.

Figura 8: Ilustração da Situação



Fonte: Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074. Acesso em: 25 fev. 2015

a) Como saber se o depósito de lixo está a mesma distância das casas?

b) Você sabe dizer qual o nome do lugar geométrico em que o depósito de lixo ficará posicionado?

c) Qual a propriedade geométrica desse ponto?

Como podemos encontrar os demais pontos notáveis utilizando o GeoGebra

Incentro

Passos

1º) Criar um triângulo ABC.

2°) Encontrar as bissetrizes clicando nos vértices no sentido anti-horário.

3°) Marcar a interseção entre as bissetrizes para determinar o ponto desejado.

Qual a característica desse ponto?

4º) Construa uma circunferência com centro na intersecção entre as bissetrizes e raio com medida deste ponto até um dos pontos médios dos segmentos do triângulo.

O que podemos concluir a respeito dessa situação?

O que garante a validade dessa propriedade?

Circuncentro

Passos

1º) Criar um triângulo ABC.

2°) Encontrar os pontos médios dos lados AB, BC e CA.

3°) Traçar as retas perpendiculares aos lados e que passam pelos seus respectivos pontos médios.

4°) Marcar a interseção entre as mediatrizes para encontrar o ponto desejado.

Qual a característica desse ponto?

5º) Construa uma circunferência com centro na interseção entre as mediatrizes e raio com medida deste ponto até um dos vértices.

O que podemos concluir a respeito dessa situação?

O que garante a validade dessa propriedade?

Ortocentro

Passos

1º) Criar um triângulo ABC.
2°) Traçar retas perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo vértice oposto.
3°) Marcar a interseção entre essas retas para determinar o ponto desejado.

Qual a característica desse ponto?

3.2 COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

O professor pode orientar os alunos de modo que os mesmos pensem em como chegar à solução, constituindo uma aula investigativa, pois a aula deve ser centrada nas ideias e nas pesquisas dos alunos. De acordo com Ponte (2009) os passos de uma aula investigativa são: reconhecer uma situação problema, explorá-la, formular questões, organizar os dados, formular conjecturas, realizar os testes, reavaliar a conjectura e avaliar o resultado.

Como a aula deverá ocorrer no laboratório de informática cada aluno deve ter uma folha impressa com as questões para que registrem na mesma suas respostas, e solicitar a turma que salve os arquivos elaborados no *GeoGebra* para fins avaliativos.

Para encontrar a solução da situação pode-se construir um triângulo onde cada vértice representa as casas da situação acima, obter os pontos médios dos segmentos (lados) e suas respectivas medianas.

É interessante o professor andar pelo laboratório de informática para melhor acompanhar o desenvolvimento da atividade. Também vale ressaltar a importância de se trabalhar com diferentes triângulos: escaleno, equilátero, isósceles e triângulo retângulo.

3.3 AVALIAÇÃO

O professor poderá avaliar as respostas dos alunos na folha de atividades, bem como, as construções que constam no arquivo salvo da atividade realizada no laboratório de informática.

3.4 ATIVIDADE 2

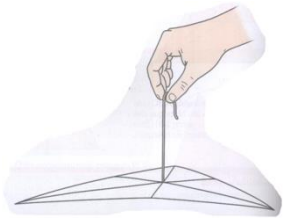
(Duração: 4 horas/aula)

1) Construa uma mediana em um triângulo qualquer.

Lembrando que: O baricentro é determinado pelo encontro das medianas de um triângulo.

2) A partir do exemplo anterior, construa o Baricentro do triângulo.

Você Sabia?
Ao pendurarmos um barbante no baricentro de um triângulo, o mesmo fica em equilíbrio!



3) Construa a Bissetriz de um triângulo qualquer.

4) Na mesma construção, repita o procedimento para todos os vértices e encontre as três bissetrizes, cada uma relativa a um vértice. O ponto de interseção das três bissetrizes é denominado?

5) Em um triângulo qualquer construa a altura relativa a cada lado.

Curiosidade: Esse ponto é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

6) Com base na construção anterior é possível encontrar o Ortocentro? Defina Ortocentro.

7) Construa em um triângulo qualquer a mediatriz relativa a cada lado.

Lembrando que: Denomina-se mediatriz de um segmento de reta, a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

8) Marque o ponto de interseção das três Mediatrizes. O ponto de interseção das três mediatrizes é denominado?

9) Na construção anterior da Bissetriz trace a circunferência com centro na interseção das bissetrizes e que tangencia um dos lados do triângulo. Defina novamente o que é Incentro.

10) Na construção da Mediatriz anterior, trace a circunferência com centro na interseção das mediatrizes e que passa por um dos vértices do triângulo. Defina novamente o que é Circuncentro.

3.5 COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

A atividade pode ser realizada na sala de aula ou em um laboratório de Matemática caso exista na escola. Também podemos dispor os alunos em duplas ou trios para que ocorra a troca de conhecimento nas construções com régua e compasso.

O professor poderá entregar uma folha impressa contendo a atividade para solicitar que se registre as respostas para fins avaliativos.

É interessante o professor andar pela sala para melhor acompanhar o desenvolvimento da atividade. Também vale ressaltar a importância de se trabalhar com diferentes triângulos: escaleno, equilátero, isósceles e triângulo retângulo.

3.6 AVALIAÇÃO

O professor poderá avaliar as respostas dos alunos que constam no arquivo salvo da atividade realizada no laboratório de informática.

4 SUGESTÕES DE SITES PARA PESQUISA SOBRE O ASSUNTO

Banco Internacional de Objetos Educacionais: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/19697> Possui uma animação dinâmica que ao ser baixada, auxilia o aluno e até mesmo o professor na visualização do Incentro, Circuncentro, Ortocentro e Baricentro de um triângulo.

GeoGebra Tube: <https://www.geogebratube.org/> Possui várias construções matemáticas prontas que podem ser visualizadas no *software GeoGebra*, as quais podem auxiliar o professor não somente nesse conteúdo, mas em outros também.

Khan Academy: <https://pt.khanacademy.org/math/geometry/triangle-properties> Apresenta exercícios, problemas e vídeos que abordam diferentes conteúdos matemáticos, inclusive as propriedades especiais e pontos notáveis dos triângulos.
Obs.: há algumas páginas do *site* ainda não foram traduzidas para o português.

Portal do Professor: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=14366> Contempla um Plano de Aula, o qual o objetivo é explorar o Incentro.

Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074> Apresenta em um vídeo uma aplicação do Circuncentro, além de explicar os pontos notáveis e a reta de Euler.

5 REFERÊNCIAS

Atividade *GeoGebra*. Disponível em: <https://sites.google.com/a/catolica.edu.br/trabalhos_matematica/homepage/PPEM-I/atividade_*GeoGebra*>. Acesso em: 09 out. 2014.

BASTARZ, Carlos Frederico. **Tópicos em Geometria Analítica Ponto e Reta.**

Diálogo Geométrico. Disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/video?idItem=7234>. Acesso em: 10 fev. 2015.

Khan Academy. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/geometry/triangle-properties/triangle_property_review/v/euler-s-line-proof>. Acesso em: 06 mar. 2015.

OLIVEIRA, J. C. R; TORTOLA, E. **O ensino de pontos notáveis por meio do *GeoGebra*: uma discussão em um curso de formação continuada.** Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1122.pdf >. Acesso em: 30 set. 2014.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

Portal Escola. Disponível em: <http://www.portalescolar.net/2011/03/circuncentro-ceviana-corolario-cubo.html>. Acesso em: 25 fev. 2014.

Portal do Professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=14366>. Acesso em: 25 fev. 2014.

Relato: Triângulos. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=191>. Acesso em: 01 out. 2014.

SILVA, C. A.. **O Resgate de Elementos e de Construções do Desenho Geométrico para Auxiliar o Estudo da Geometria Espacial com Alunos do 2º Ano do Ensino Médio.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2011.